

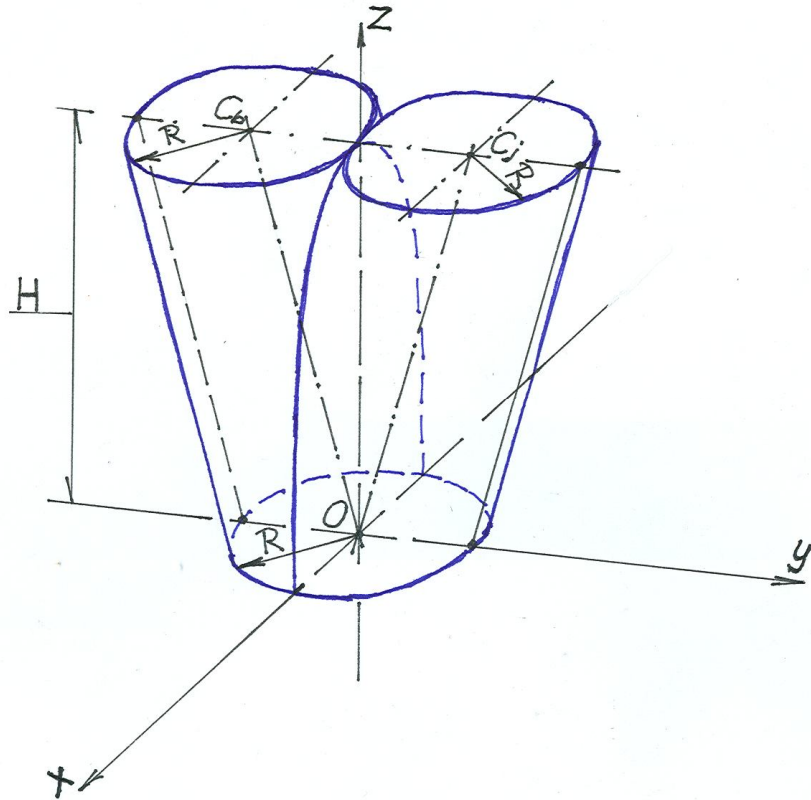
Két ferde körhenger

Oldjuk meg a következő feladatot!

Adott: két *ferde körhenger*, közös H magassággal, közös R sugarú, egybeeső alaplappal és érintkező fedőlappal – ld. 1. ábra!

Keresett: ~ a felület matematikai leírása;

~ az áthatási görbe egyenlete.



1. ábra

Megoldás:

Először is rögzítjük, hogy az adott felület az (xz) síkra szimmetrikus, így elegendő csak az egyik – itt: a jobb oldali – felét vizsgálni. Ezt úgy végezzük, hogy felírjuk a palástfelület egy kiválasztott P pontjának koordináta - egyenleteit. Ehhez tekintsük a 2. ábrát!

Ennek alapján:

$$x_1 = R \cdot \cos \varphi, \quad (1)$$

$$x = x_1; \quad (2)$$

(1) és (2) szerint:

$$x = R \cdot \cos \varphi. \quad (3)$$

Hasonlóan:

$$y_1 = R \cdot \sin \varphi, \quad (4)$$

$$y = e + y_1, \quad (5)$$

$$e = z \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad (6)$$

Most figyelembe véve, hogy az áthatási görbe az

$$y = 0 \quad (11)$$

síkban helyezkedik el, így (10) és (11) - gyel az áthatási görbére fennáll, hogy

$$x^2 + z^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = R^2, \quad (12)$$

vagy átalakítva:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 1; \quad (13)$$

tekintettel a 2. ábráról leolvasható

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H} \quad (14)$$

összefüggésre is, (13) és (14) - gyel:

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{z^2}{H^2} = 1 \quad (15)$$

adódik. A (15) képlet egy R és H féltengelyekkel bíró *ellipszis* egyenlete – ld.: [1]! –, így mondhatjuk, hogy a fenti ferde körhengerek áthatási görbéje: ellipszis.

Az 1. és 2. ábrán ennek a felső felét tüntettük fel. Most térjünk vissza (10) - hez!

Rendezés után:

$$(y - z \cdot \operatorname{tg} \alpha)^2 = R^2 - x^2; \quad (16)$$

a pozitív gyököt véve:

$$y - z \cdot \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (17)$$

innen

$$z = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} (y - \sqrt{R^2 - x^2}), \quad (18)$$

vagy (14) - gyel is:

$$\underline{\underline{z(x, y) = \frac{H}{R} \cdot (y - \sqrt{R^2 - x^2}).}} \quad (19)$$

Ez a *jobb oldali felületdarab* egyenlete; fennállnak még itt az alábbi korlátozások is:

$$\left. \begin{aligned} -R &\leq x \leq R; \\ 0 &\leq y \leq R \cdot \left(1 + \frac{z}{H}\right); \\ 0 &\leq z \leq H. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

A (20) képletek középső összefüggése megerősíti azt a gyanúkat, hogy valójában a *z* koordináta játssza a független változó szerepét, ellentétben a (19) felírással.

Most térjünk vissza a paraméteres megadási módra!

Először (7) és (14) - gyel:

$$y(\varphi, z) = R \cdot \left(\sin \varphi + \frac{z}{H} \right), \quad (21)$$

$$x(\varphi) = R \cdot \cos \varphi. \quad (22)$$

Az utóbbi képletek használatához meg kell adni a φ paraméter értelmezési tartományát.

A 2. ábráról leolvasható, hogy

$$\varphi = \varphi(z), \quad (23)$$

vagyis a φ paraméter a z változó függvénye. Ugyanis a φ paraméter számára a (11) egyenlet szerinti korlátozás áll fenn, vagyis (11) és (21) -ből:

$$\sin \varphi^* + \frac{z}{H} = 0; \quad (24)$$

ámde fennáll, hogy

$$\sin \varphi^* = \sin(180^\circ - \varphi^*), \quad (25)$$

így (24) és (25) szerint

$$\varphi_1^* = \varphi^* = \arcsin \left(-\frac{z}{H} \right) = -\arcsin \frac{z}{H}, \quad (26)$$

$$\varphi_2^* = 180^\circ - \varphi^* = 180^\circ + \arcsin \frac{z}{H}; \quad (27)$$

most már (26) és (27) szerint írhatjuk, hogy

$$-\arcsin \frac{z}{H} \leq \varphi(z) \leq 180^\circ + \arcsin \frac{z}{H}. \quad (28)$$

Végül (21), (22) és (23) szerint:

$$\left. \begin{aligned} x(z) &= R \cdot \cos \varphi(z); \\ y(z) &= R \cdot \left[\sin \varphi(z) + \frac{z}{H} \right]; \\ z &= z. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Egy tetszőleges – jobb oldali – $P(x, y, z)$ felületpont felkeresése a (29) egyenletek szerint történhet. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyezzük, hogy

~ a felület ábrázolását például a

$$z_i = i \cdot \frac{H}{N}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N$$

összefüggés szerint választott z - koordináták felvétele után a (28), (29) képletek alapján végezhetjük: szintenként megrajzoljuk a köríveket;

~ ez a feladat már egy középiskolásnak sem túl nehéz, hiszen az alkalmazott matematika, illetve geometria számára is érthető marad;

~ a felület emlékeztetheti valamire az Olvasót; mi az?

A nem indokolt, de felhasznált azonosságokat illetően is ld.: [1]!

Irodalom:

[1] – I. N: Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, több kiadásban

Összeállította: Galgóczi Gyula
mérnöktanár

Sződliget, 2009. június 15.